Antisymmetrische Feldquantisierung und funktionale Integration

O. KLEIN

Ringen 21, Stocksund, Schweden

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1291—1293 [1967]; eingegangen am 3. Juni 1967)

Herrn Professor PASCUAL JORDAN *zum 65. Geburtstag gewidmet*

Ausgehend von der von MATTHEWS und SALAM angegebenen Behandlung der antisymmetrischen Quantisierung eines DIRAC-Feldes mittels funktionaler Integration unter Anwendung von antikommutierenden Feldfunktionen wird zu zeigen versucht, daß ein widerspruchsfreies Verfahren die Kommutierbarkeit der Feldfunktionen verlangen dürfte.

Die von JORDAN erfundene antisymmetrische Feldquantisierung, wodurch das PAULI-Prinzip seine adäquate mathematische Formulierung erhielt, bildet unzweifelhaft eine der wichtigsten Grundlagen für die Quantenfeldtheorie und spielte eine hervorragende Rolle bei der erfolgreichen Entwicklung der Quantenelektrodynamik. Bekanntlich ist es FEYNMAN gelungen, durch die sogen. funktionale Integration die symmetrische Feldquantisierung im Fall ganzzahligen Spins unter Benutzung einer LAGRANGE-Dichte, worin die Feldgrößen kommutieren, ohne weitere Annahmen abzuleiten. Obgleich mehrere interessante Versuche gemacht wurden, das FEYNMANsche Verfahren für den Fall der antisymmetrischen Quantisierung zu verallgemeinern, wurde bei diesen eine Antikommutation der in die LAGRANGE-Dichte eingehenden Feldgrößen schon vorausgesetzt. Besonders sei hier auf eine Arbeit von MATTHEWS und SALAM [1] hingewiesen, die unter anderem eine interessante Modifikation von FEYNMANS Methode für den symmetrischen Fall enthält, nämlich ein sehr direktes Verfahren zur Berechnung der Propagatoren. Dieses wird dann auf den antisymmetrischen Fall angewendet, wobei die Feldgrößen nach einem System von antikommutierenden Eigenfunktionen in einem Raum-Zeitbereich entwickelt werden, wobei die Koeffizienten als Variable für die funktionale Integration benutzt werden. Jedoch wurden wiederholt Zweifel an der Existenz eines solchen Systems von Eigenfunktionen erhoben. In der Tat dürfte die notwendige Normierbarkeit dieser Funktionen ihrer totalen Antikommutation widersprechen, die auch für eine Funktion mit sich selbst gelten muß.

Andererseits waren die Resultate der genannten Arbeit zu vielversprechend, um nicht den Versuch zu einer widerspruchsfreien Darstellung anzuregen. Es lag deshalb nahe zu untersuchen, ob es nicht möglich wäre, auch im antisymmetrischen Fall von einer aus kommutierenden Feldgrößen bestehenden LAGRANGE-Dichte auszugehen. Dadurch wäre nicht nur der erwähnte Widerspruch vermieden, sondern das PAULI-Prinzip würde durch das FEYNMANsche Quantisierungsverfahren ohne weitere Annahme direkt aus den Eigenschaften der LAGRANGE-Dichte für halbzahlige Spinfelder folgen. Ohne einen wirklichen Beweis zu liefern, werden wir im folgenden Gründe dafür angeben, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Zu diesem Zweck wiederholen wir die wesentlichen Überlegungen der Arbeit von MATTHEWS und SALAM [1], wobei wir das System der Eigenfunktionen ähnlich definieren wie BURTON und DE BORDE in einer etwas späteren Arbeit [2]. Es sei also das Wirkungsintegral gegeben durch

$$I = -\int \bar{\psi}(x)\, D\, \psi(x)\, \mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

wo D den DIRAC-Operator in Gegenwart eines skalaren Feldes $\varphi(x)$ mit der Wechselwirkungskonstante g vorstellt, nämlich

$$D = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \varkappa + g\, \varphi(x)\,, \tag{2}$$

wobei $$\bar{\psi}(x) = i\, \psi^* \gamma^4, \quad (\gamma^4)^2 = -1\,. \tag{3}$$

Wie MATTHEWS und SALAM benutzen wir hierbei eine MAJORANA-Darstellung der γ^μ. Es ist zweckmäßig, wie es BURTON und DE BORDE getan haben, den folgenden Operator einzuführen

$$L = i\, \gamma^4 D\,, \tag{4}$$

der im Gegensatz zu D HERMITEsch ist. Dessen Eigenwerte für das in Frage stehende Raum-Zeit-

[1] MATTHEWS u. SALAM, Nuovo Cimento **2**, 120 [1955].

[2] BURTON u. DE BORDE, Nuovo Cimento **4**, 254 [1956].

gebiet bezeichnen wir mit λ_n, und die entsprechenden Eigenfunktionen mit $\psi_n(x)$. Dieselben mögen die folgenden Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen erfüllen

$$\int \psi_n^*(x)\,\psi_{n'}(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nn'}. \tag{5}$$

Für $\psi(x)$ und $\psi^*(x)$ setzen wir nun

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_n \xi_n\, e^{i\eta_n}\, \psi_n(x),\\ \psi^*(x) &= \sum_n \xi_n\, e^{-i\eta_n}\, \psi_n^*(x),\end{aligned} \tag{6}$$

wo ξ_n und η_n reelle Zahlen sind. Für den Vakuumerwartungswert von irgend einem Funktional Ω der Werte von ψ und ψ^* in den verschiedenen Punkten des gewählten Raum-Zeitgebiets, d. h. von irgend einer Funktion der ξ_n und η_n, haben wir dann zu setzen

$$\langle 0\,|\,\Omega\,|\,0\rangle = \int \xi_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta_1 \int \xi_2\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta_2 \ldots e^{i(F+I)}\,\Omega, \tag{7}$$

wo $$e^{-iF} = \int \xi_1\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\eta_1 \int \xi_2\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta_2 \ldots e^{iI}. \tag{8}$$

Abgesehen von der Kommutativität der hier auftretenden ψ-Funktionen entspricht dieser Ansatz völlig dem Verfahren von Matthews und Salam. Die Integration nach den ξ_n geht dabei von 0 bis ∞, wobei man sich einen passend gewählten Zusatzterm im Exponenten, etwa von der Form $-\varepsilon \sum \xi_n^2$, zu denken hat, welcher das Integral konvergent macht, wobei dann ε im Resultat gleich Null gesetzt wird. Die η_n gehen bei der Integration von 0 bis 2π. Um die richtigen Propagatoren zu erhalten, benutzt man, wie es Matthews und Salam getan haben, die Feynmansche Vorschrift, wonach $\varkappa$ bei der Integration durch $\varkappa - i\varepsilon$ zu ersetzen ist.

Indem wir die Reihen für ψ und ψ^* in das Wirkungsintegral (1) einführen, dabei (4) benutzend, bekommen wir

$$I = -\sum \lambda_n\, \xi_n^2 \tag{9}$$

und durch einfache Rechnung

$$i\,F = \sum \ln \lambda_n + \text{const}, \tag{10}$$

und ferner

$$\langle \xi_n^{2k}\rangle = i^k\, e^{iF}\, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda_n^k}\,(e^{-iF}), \tag{11}$$

woraus folgt

$$\langle \xi_n^{2k}\rangle = (-i)^k\, \frac{k!}{\lambda_n^k}. \tag{12}$$

Nach diesen Vorbereitungen berechnen wir nun den Einpartikelpropagator

$$S(1,1',g) = \langle 0\,|\,\psi(x)\,\psi^*(x')\,|\,0\rangle, \tag{13}$$

wo der Buchstabe g sich auf die Kopplungskonstante bezieht. Auf Grund von (6) hat man

$$\psi(x)\,\psi^*(x') = \sum_{n,n'} \xi_n\,\xi_{n'}\, e^{i(\eta_n-\eta_{n'})}\,\psi_n(x)\,\psi^*_{n'}(x'),$$

und also, wegen (12)

$$\begin{aligned}S(1,1',g) &= -i\sum_n \psi_n(x)\,\psi_n^*(x)/\lambda_n\\ &= i\sum_n \psi_n(x)\,L^{-1}\,\psi_n^*(x'),\end{aligned}$$

wo wir von der Asymmetrie von L in der Majorana-Darstellung Gebrauch gemacht haben. Aber

$$L^{-1}\,\psi^* = i\,D^{-1}\,\gamma^4\,\psi^* = -D^{-1}\,\overline{\psi},$$

und also $$S(1,1',g) = -i\sum_n \psi_n\, D^{-1}\,\overline{\psi}_n. \tag{14}$$

Diese Formel ist identisch mit der entsprechenden Formel bei Matthews und Salam[1] (3,12, p. 127). Sie gilt für beliebige Werte der Konstante g. Wie dort hervorgehoben, besteht zwischen $S(1,1',g)$ und $S(1,1'')$ (wo $g=0$) die folgende Integralgleichung

$$S(x,y,g) = S(x,y) + i\,g\int S(x,z)\,\varphi(z)\,S(z,y,g)\,\mathrm{d}z. \tag{15}$$

Sie zeigen, daß die Fredholmsche Lösung dieser Integralgleichung durch eine direkte Berechnung von $S(x,y,g)$ folgt, indem e^{iI} nach Potenzen von g entwickelt wird.

Unter Benutzung des durch ihre Methode abgeleiteten Ausdrucks für einen Propagator n-ter Ordnung, nämlich

$$S(1,2,\ldots,n,1',2',\ldots n') = (-1)^{n(n-1)/2} \begin{vmatrix} S(1,1'),\ldots,S(1,n') \\ \vdots \qquad \vdots \\ S(n,1'),\ldots,S(n,n') \end{vmatrix}, \tag{16}$$

bekommen sie $$N(g) = N(0)\,D(i\,g), \tag{17}$$

wo $$D(\lambda) = \sum_n \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \mathrm{d}x_1 \ldots \int \mathrm{d}x_n \begin{vmatrix} S(x_1,x_1)\,\varphi(x_1),\ldots,S(x_1,x_n)\,\varphi(x_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ S(x_n,x_1)\,\varphi(x_1),\ldots,S(x_n,x_n)\,\varphi(x_n) \end{vmatrix} \tag{18}$$

die FREDHOLMsche Determinante der Gl. (15) bedeutet und N die oben mit e^{-iF} bezeichnete Größe ist, woraus dann die FREDHOLMsche Lösung der Integralgleichung (15) folgt. Da bei unserem Verfahren derselbe Ausdruck für $S(1,1',g)$ folgt wie bei MATTHEWS und SALAM, so sollte die entsprechende Reihenentwicklung nach Potenzen von g zu der FREDHOLMschen Lösung führen. Dabei müßte eine Identität bestehen zwischen den entsprechenden Koeffizienten, die in beiden Fällen dieselben Kombinationen der nach den beiden Verfahren beziehungsweise berechneten Propagatorausdrücke enthalten. Man würde erwarten, daß dadurch die Identität der entsprechenden Propagatoren folgen würde. Jedoch dürfte eine eingehende Untersuchung der betreffenden Propagatoren auf Grund des hier vorgeschlagenen Verfahrens erforderlich sein, um diese Frage zu entscheiden.

Unimodular Matrices Homomorphic to Lorentz Transformations in $n \geqq 2$ Spacelike Dimensions

A. W. SÁENZ

Naval Research Laboratory, Washington, D. C.

and E. P. WIGNER

Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, N. J.

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1293—1299 [1967]; received 30 June 1967)

Dedicated to Professor PASCUAL JORDAN *on the occasion of his 65th birthday*

We generalize the usual homomorphism between 2×2 unimodular matrices $B(\Lambda)$ and restricted 4×4 LORENTZ matrices Λ to the case of one timelike and $n \geqq 2$ spacelike dimensions. For every such n which is even (odd), this generalization associates homomorphically to each restricted (orthochronous) $(n+1)$-dimensional LORENTZ matrix a set of $N\times N$-dimensional unimodular matrices, where $N=2^{n/2}$ or $2^{(n-1)/2}$, depending on whether n is even or odd. In the case $n \geqq 2$, we prove the theorem that, if $B(\Lambda)$ and $B(\Lambda^{T})$ are any two such unimodular matrices associated with Λ and its adjoint Λ^{T}, respectively, then $B(\Lambda^{T})=\omega\, B(\Lambda)^{\dagger}$, where ω is an N^{th} root of unity and $\dagger$ means hermitean adjoint. We also prove that for $n>3$ one can select these two unimodular matrices so that this equation holds with $\omega=1$, but that no such selection is possible for $n=2, 3$.

The purpose of the present paper is to establish a homomorphic correspondence between a subgroup of the unimodular matrices and the LORENTZ transformations in $(n+1)$-dimensional space with one timelike and $n \geqq 2$ spacelike dimensions. This correspondence, which generalizes the well-known correspondence for $n=3$ between 2×2 unimodular matrices and 4×4 restricted LORENTZ transformations, is established in Section 1. We have devoted Section 2 to two proofs, which we believe to be simple, of a theorem on the unimodular matrix associated with the transpose of an $(n+1)$-dimensional LORENTZ matrix for $n \geqq 2$. This theorem is essentially known for the case of three spatial dimensions [1, 2], the only accessible proof being, however, that in reference [2].

1. Homomorphism Between Lorentz Transformations and Unimodular Matrices for $n \geqq 2$

Consider a fixed irreducible set τ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ of $n \geqq 2$ hermitean matrices which satisfy the equation [3]

$$\tau_k\,\tau_l+\tau_l\,\tau_k=2\,\delta_{kl}\,1 \quad (k,l=1,2,\ldots,n). \quad (1)$$

[1] See, for example, p. 41, Eq. (2.8) of the article of E. P. WIGNER on "Unitary Representations of the Inhomogeneous LORENTZ Group Including Reflections" in Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, Gordon and Breach, New York 1964.

[2] I. M. GEL'FAND, R. A. MINLOS, and Z. YA. SHAPIRO, Representations of the Rotation and LORENTZ Groups and Their Applications, Pergamon Press, New York 1963, p. 170—171.

[3] Even if not stated explicitly, the inequality $n \geqq 2$ is always supposed to hold in this paper. Lower case Greek and Latin indices run over $0, 1, \ldots, n$ and $1, 2, \ldots, n$, respectively, and all equations involving free indices of these two types should be understood to hold for all values in these respective ranges. Summations over Greek and Latin indices also run over the full ranges of these indices.